

$$f \text{ διαγωνίσιμη} \Leftrightarrow [f]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

16/3/17

$$\text{υπάρχει βάση } \alpha = \{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$$

$$\lambda \text{ ιδιοτιμή της } f \Leftrightarrow \text{υπάρχει } \vec{\alpha} \neq \vec{0} \quad f(\vec{\alpha}) = \lambda \vec{\alpha}$$

Ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της f

$$\chi_f(x) = \det([f]_b^b - x I) \quad b = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\} \text{ βάση του } V$$

Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Ορισμός: Έστω $A \in K^{n \times n}$. Αν υπάρχει $\lambda \in K$ και $X \neq 0$, $X \in K^{n \times 1}$, τέτοια ώστε $AX = \lambda X$, θα λέμε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A και το X είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A .

$$A \in K^{n \times n} \quad f_A: K^{n \times 1} \rightarrow K^{n \times 1} \quad f_A(X) = AX$$

$$[f_A]_{\varepsilon}^{\varepsilon} = A$$

ε κανονική βάση του $K^{n \times 1}$

$$f_A(X) = \lambda X$$

λ ιδιοτιμή του πίνακα A αν και μόνο αν λ ιδιοτιμή της γραμμικής απεικόνισης f_A

X ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A αν και μόνο αν X ιδιοδιάνυσμα της γραμμικής απεικόνισης f_A .

Ορισμός: Ένας πίνακας A είναι διαγωνίσιμος αν η γραμμική απεικόνιση $f_A: K^{n \times 1} \rightarrow K^{n \times 1}$ με $f_A(X) = AX$ είναι διαγωνίσιμη.

f_A διαγωνίσιμη $\Leftrightarrow$ υπάρχει κατάλληλη βάση $\alpha = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ έτσι ώστε

$$[f_A]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$[f_A]_{\alpha}^{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\alpha} [f_A]_{\alpha}^{\alpha} [I]_{\alpha}^{\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = P^{-1} A P$$

Πρόταση: Ο πίνακας $A \in K^{n \times n}$ είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα.

Θεώρημα: Έστω $\lambda \in K$ και $A \in K^{n \times n}$. Το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Απόδειξη: λ ιδιοτιμή του A

$$\Leftrightarrow \text{υπάρχει } X \neq 0_{n \times 1}, X \in K^{n \times 1} \quad AX = \lambda X$$

$$\Leftrightarrow \text{υπάρχει } X \neq 0, X \in K^{n \times 1} \text{ τέτοιο ώστε } (A - \lambda I_n)X = 0_{n \times 1}$$

$\Leftrightarrow$ Το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I)X = 0$ δεν είναι σύστημα Cramer.

$$\chi_A(x) = \det(A - xI)$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα.

► Έστω λ ιδιοτιμή του πίνακα A .

$$\begin{aligned} \text{Το σύνολο } V_A(\lambda) = V(\lambda) &= \{X \in K^{n \times 1} / AX = \lambda X\} = \\ &= \{X \in K^{n \times 1} / (A - \lambda I_n)X = 0\} \end{aligned}$$

ονομάζεται ιδιοχώρος ~~του~~ ^{του} πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

$$\begin{aligned} V_A(\lambda) &= \{X \in K^{n \times 1} / (A - \lambda I_n)X = 0\} \\ &= \{X \in K^{n \times 1} / (f_A - \lambda I_{K^{n \times 1}})X = 0\} \\ &= \text{Ker}(f_A - \lambda I_{K^{n \times 1}}) \end{aligned}$$

Άσκηση: Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους ιδιοχώρους του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{Λύση}}: \chi_A(x) = \det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ 3 & -5-x & 3 \\ 6 & -6 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= r_2 - r_1 \begin{vmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ 2+x & -2-x & 0 \\ 6 & -6 & 4-x \end{vmatrix} = (2+x) \begin{vmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 6 & -6 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(x) = (2+x) \begin{vmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 \rightarrow r_3 - 6r_2} = (2+x)(4-x) \begin{vmatrix} 1-x & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2+x)(4-x)(-1+x+3) = (x+2)^2 \cdot (4-x)$$

ιδιοτιμές $4(\cos \lambda)$, $-2(\sin \lambda)$

6' ζήτηση: $\chi_A(x) = -x^3 + \dots + 16$

$P = \frac{K}{\lambda}$, $\rho = \frac{1}{\lambda}$

$V_A(4) = \{ X \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \mid (A - 4I)X = \mathbf{0}_{3 \times 1} \}$

$(A - 4I | 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1-4 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -5-4 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 4-4 & 0 \end{array} \right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_1/-3 \\ r_2/3 \\ r_3/6 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$

$r_2 - 2r_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$x + y - z = 0$

$y - \frac{1}{2}z = 0$

$x = \frac{1}{2}t$

$y = \frac{1}{2}t$

$z = t$

$\rightarrow = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 t \\ 1/2 t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle^{3 \times 1}$

$$V_A(-2) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \mid (A+2I)x = 0_{3 \times 1} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+2 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -5+2 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 4+2 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\cancel{x+y} \quad x-y+z=0 \Rightarrow x=t-s$$

$$y=t \quad y=t$$

$$z=s \quad z=s$$

$$V_A(-2) = \left\{ \begin{pmatrix} t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

↙
basis

Έστω $0 \neq A$ συμμετρικός;

$$f_A: \mathbb{R}^{3 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 1}$$

$$f_A(x) = Ax$$

Τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ αφού

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

$$[f]_{\alpha}^{\alpha} = [I]_{\varepsilon}^{\alpha} [f_A]_{\varepsilon}^{\varepsilon} [I]_{\alpha}^{\varepsilon}$$

Ε κανονική βάση του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$

$$a = \left\{ \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\nwarrow f_A(\vec{a}_1)$ $\nwarrow f_A(\vec{a}_2)$
 $\nearrow f_A(\vec{a}_1) = A\vec{a}_1$ $\nearrow f_A(\vec{a}_3) = A\vec{a}_3 = -2\vec{a}_3$

► Βρείτε τον πίνακα A^{2017}

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = P^{-1} A P$$

$$A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^{2017} = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{2017 \text{ φορές}} = P \Delta P^{-1} P \Delta P^{-1} \dots P \Delta P^{-1} =$$

$$= P \cdot \Delta \Delta \Delta \dots \Delta P^{-1} = P \Delta^{2017} P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

$$A^{2017} = P \Delta^{2017} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{2017} P^{-1} =$$

$$= P \begin{pmatrix} 4^{2017} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{2017} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{2017} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Παρατήρηση: • $\chi_f(x) = \det \left([f]_a^a - xI \right) = \det \left([f]_e^e - xI \right)$

Έτσι ότι f είναι διαγωνίσιμη αντιστοιχεί.
 α αντελέγεται από ιδιοδιανύσματα

$$\chi_f(x) = \det \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} - xI \right) = \det(A - xI)$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \stackrel{x=0}{=} \det A$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det A$$

• λ ιδιοτιμή του πίνακα αν και μόνο αν

Κριτήριο Διαγωνισιότητας

Θεώρημα: Έστω V ένας K -δυναμιτικός χώρος και $n = \dim V$, $f: V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές. Το παρακάτω είναι ισοδύναμο:

- 1) H f είναι διαγωνισίμη.
- 2) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων (όχι απαραίτητα διαφορετικών μεταξύ τους)
δηλ. $\chi_f(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_s)^{n_s}$ και για κάθε $1 \leq i \leq s$ ισχύει $\dim V(\lambda_i) = n_i$
- 3) Ισχύει $n = \dim V(\lambda_1) + \dots + \dim V(\lambda_s)$
- 4) Υπάρχει μια βάση του V που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα.

$\dim V(\lambda_i)$	n_i
γεωμετρική	αλγεβρική
πολλαπλότητα	πολλαπλότητα

Φυλλάδιο #1

Άσκηση 3: $A, B \in K^{n \times n}$

AB αντιστρέψιμος πίνακας

$$\Rightarrow \det(AB) \neq 0 \Rightarrow \det A \cdot \det B \neq 0$$

$$\Rightarrow \det A \neq 0 \text{ και } \det B \neq 0$$

$$\Rightarrow A \text{ αντιστρέψιμος και } B \text{ αντιστρέψιμος}$$

Άσκηση 4: A, B όμοιοι $\Rightarrow$ υπάρχει P αντιστρέψιμος έτσι ώστε

$$A = P^{-1} B P$$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ φορές}} = P^{-1} B P \cdot P^{-1} B P \cdots P^{-1} B P = P^{-1} B^k P$$

Άρα A^k και B^k όμοιοι

Άσκηση 5: $\text{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

↑
ίχνος

$$\text{tr}: K^{n \times n} \rightarrow K$$

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \text{tr} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}+b_{11} + a_{22}+b_{22} + \cdots + a_{nn}+b_{nn} = (a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}) + (b_{11}+b_{22}+\cdots+b_{nn})$$

$$(b_{11} + \cdots + b_{nn}) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$\text{tr}(\lambda A) = \text{tr} \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & & \\ & \lambda a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda a_{11} + \lambda a_{22} + \dots + \lambda a_{nn} =$$

$$\lambda(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = \lambda \text{tr}(A)$$

$$A, B \in K^{n \times n} \Rightarrow \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$\text{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \dots$$